

Bernd Wollring, Universität Kassel

# Ein Fallbeispiel zur fachdidaktischen Diagnostik und zur Ethik der Leistungseinschätzung in der Grundschule

In: Bosse, D. & Posch, P. (2009) (Hrsg.). *Schule 2020 aus Expertensicht – Zur Zukunft von Schule, Unterricht und Lehrerbildung* (305 – 312). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. Erschienen zum akademischen Abschied von Prof. Dr. Rudolf Messner, Erziehungswissenschaftler an der Universität Kassel

Handout zum Referat für die Deutschsprachige Gemeinschaft Belgiens  
in Eupen am 28. November 2009:

1. Zentraler Teil des Vortrags von B. Wollring
2. zitierter Text von Spiegel und Selter, aufbereitet als Serie von drei Bewertungsproblemen für Lehrende und Deutungstext von Ch. Selter und H. Spiegel

Rudolf Messner hat sich um die erziehungswissenschaftliche Bildung künftiger Lehrerinnen und Lehrer ebenso verdient gemacht wie um die Integration von erziehungswissenschaftlicher und fachdidaktischer Bildung. Sein offensives Interesse an der Einbindung auch fachdidaktischer Perspektiven bis hin zur fachdidaktisch basierten Diagnostik ist ein außergewöhnlicher Charakterzug eines großen Erziehungswissenschaftlers, die nicht nur auf einer fundierten Kompetenz, sondern auch auf einer berufsbezogenen Ethik basiert. Ihm sei die folgende kleine Betrachtung gewidmet.

## 1 Zur Ausgangslage

Studierende des Lehramtes an Grundschulen zeigen zum Studienbeginn häufig eine Erwartungshaltung dahingehend, dass die Ausbildung in den Fächern, insbesondere in den Kernfächern Deutsch, Mathematik und Sachunterricht, ihnen möglichst problemlos umsetzbare Elemente des Unterrichtswissens liefern möge. Dem entgegen stehen häufig die Intentionen ihrer Ausbilder, insbesondere in meinem Fach Mathematik, dahingehend, dass eine fachliche Fundierung des Lehrerwissens unabdingbar sei und einen wesentlichen Teil der Ausbildung zu stellen habe. Der daraus entstehende Zielkonflikt ist alt und in vielen Studienordnungen im In- und Ausland nach wie vor deutlich zu spüren.

Die beiden Interessenfelder könnten sich in der Position begegnen, dass die angehende Grundschullehrerin, wenn sie denn intellektuell souverän unterrichten soll, möglicherweise mit *Grundlagen* für ihre Entscheidungen besser bedient ist als mit *ausgearbeiteten Mustern* für ihre Entscheidungen. Für diese Entscheidungsgrundlagen sind die Fachinhalte unmittelbar nicht tauglich. Sie müssen aufbereitet wer-

den, aber auch die ausgearbeiteten Unterrichtsbeispiele sind dazu nicht direkt tauglich, denn sie passen meist nur in ganz bestimmten Kontexten.

Bezieht man zudem ein, dass ein zeitgemäßer Unterricht im Wesentlichen konstruktivistisch basiert sein sollte, dann ist der angehenden Grundschullehrerin mit ausgearbeiteten Unterrichtsbeispielen nur bedingt gedient. Vielmehr benötigt sie Überblickswissen, aus dem heraus sie tragfähige Entscheidungen hervorbringt. Dabei ist sie auch und wesentlich befasst mit dem, was die lernenden Kinder ihr zurückspiegeln, und die Auseinandersetzung mit den Leistungen und mit den Eigenproduktionen der Kinder gewinnt wesentliche Bedeutung neben dem, was die Lehrerin an Informationen in den Unterricht hinein gibt.

Diese Tatsache hat sich in den bildungspolitischen Positionen der letzten Jahre dahingehend niedergeschlagen, dass die Diagnostik, insbesondere die fachlich und fachdidaktisch basierte Diagnostik, deutlich an Bedeutung gewinnt. Damit erhalten auch die fachlichen Inhalte eine andere Bedeutung: Sie sind zwar bis zu einem gewissen Grade nach wie vor die Basis, auf der man inhaltliche unterrichtliche Entscheidungen aufbauen kann, vielmehr aber sind sie die Kompetenzbasis für eine angemessene fachdidaktische Diagnostik. Vereinfacht gesagt gilt: Wer keine fachliche Perspektive besitzt, kann die in den kindlichen Eigenproduktionen eingeschlossenen fachlichen Kompetenzen in statu nascendi schlicht nicht erkennen und überrollt sie womöglich mit einem aus Unsicherheit und Inkompetenz heraus imperativ gestalteten Unterricht.

Dies kann doppelt tragische Folgen haben. Eine besteht darin, dass die Kinder in einem fachlich rückständigen Unterricht schlicht „altes Zeug“ lernen, das den modernen Charakterisierungen der Fächer in den Bildungsstandards nicht entspricht. Darüber hinaus aber kann es geschehen, dass ein Kind in seinen Leistungen Opfer einer Fehleinschätzung wird, weil die Substanz in seinen Äußerungen nicht erkannt oder unangemessen beurteilt wird.

Um dies zu verdeutlichen, nutze ich in meinen Lehrveranstaltungen seit einigen Jahren ein Fallbeispiel, das ich meinen Kollegen Christoph Selter und Hartmut Spiegel verdanke. Es betrifft einen Ausschnitt aus einer Klassenarbeit von Marcel, einem Schüler im 4. Schuljahr, zu dem verschiedene Dokumente vorliegen, die jedes ihren eigenen Beitrag zur Einschätzung von Marcells Arbeit leisten.

An diesem Beispiel lässt sich die gesamte Problematik der schulischen Leistungsbeurteilung einschließlich der ihr zugrunde liegenden Ethik entwickeln. Ebenso lässt sich daran entwickeln, welche Wandlung die Positionen von Studierenden und Lehrern durchlaufen, wenn sie mit diesem Beispiel und seinen verschiedenen Dokumenten konfrontiert werden. Das Beispiel belegt paradigmatisch, welche Beurteilungsdimensionen in der Mathematik der Grundschule traditionell wirksam sein könnten und welche im Lichte einer kindorientierten Leistungsbeurteilung möglich wären.

Meine Kollegen Spiegel und Selter haben dieses Dokument primär unter der Perspektive der erforderlichen Sachanalyse veröffentlicht. Die über Jahre gleich bleibend ergiebige Nutzung in meinen eigenen Lehrveranstaltungen führt mich zu der Auffassung, dass dieses Beispiel in der Ausbildung von Lehrerinnen für die Grundschule von unschätzbarem Wert weit über das Fach hinaus ist. Auch ihnen sei daher an dieser Stelle für diesen speziellen Impuls herzlich gedankt.

## 2 Marcells Multiplikationen: Das erste Dokument

Bild 1 zeigt einen Ausschnitt aus einer Klassenarbeit von Marcel mit sieben Multiplikationen.

Sämtliche Rechenergebnisse sind falsch. Eine erste Aufgabenstellung an Studierende und Lehrerinnen fordert, diese Arbeit so mit einer Zensur zu versehen, dass diese in der Zeugniskonferenz und einer möglichen juristischen Auseinandersetzung Bestand hat. Wir nennen dies die „*Ergebnis-Zensur*“. In meinen sämtlichen Lehrveranstaltungen und Fortbildungen sahen die mit dieser Aufgabe konfrontierten Studierenden und Lehrerinnen keine andere Möglichkeit als dieser Arbeit die Ergebnis-Zensur 5 oder 6 zuzuweisen.

1. a)  $321 \cdot 32$   

1	6	0	5		

 f

b)  $534 \cdot 70$   

3	9	9	0		

 f

c)  $608 \cdot 87$   

6	4	6	4	0	
+	4	4	3	5	6
1	0	8	9	6	

 f

d)  $482 \cdot 64$   

6	9	9	2	0	
4	8	7	0		

 f

2. a)  $374 \cdot 243$   

3	3	6	6		

b)  $958 \cdot 503$   

7	6	6	4		

c)  $846 \cdot 760$   

6	9	6	0		

Bild 1: Marcells Multiplikationen in seiner Klassenarbeit

Das Beispiel bietet allerdings eine ausgezeichnete Gelegenheit, den Unterschied von „*Fehlern*“ und „*Fehlermustern*“ zu thematisieren. Ein Fehlermuster liegt vor, wenn die Fehler auf einer einheitlichen Strategie basieren. In den späten 70iger Jahren hat Gerster eine umfassende Dokumentation zu Fehlermustern bei schriftlichen Rechenverfahren vorgelegt. Es zeigt sich in diesem Fall, dass ein großer Teil der vorgelegten Ergebnisse von Marcel mit folgendem Fehlermuster zu erklären ist: Man addiert die Ziffern des rechten Faktors und multipliziert den linken Faktor mit dieser Summe.

Die Wahrnehmung eines solchen Fehlermusters verunsichert die Studierenden und Lehrerinnen häufig dahingehend, dass sie sich der Bewertung mit ihren zunächst gefassten Zensuren nicht mehr ganz so sicher sind. Es entsteht die Frage, ob für ein Kind, bei dem ein solches Fehlermuster vorliegt, die vorgegebene Aufgabenstellung die Chance zu einer fairen Beurteilung gibt. Dies mischt sich mit dem Argument, dass Fehler, die auf einem derart stabilen Fehlermuster basieren, möglicherweise in einer unterstützenden Unterweisung leichter zu heilen sind als Fehler, die „chaotisch“ gemacht werden. Darüber hinaus nehmen Studierende bisweilen wahr, dass die Formatierung der Aufgaben mit den Kästchen von Marcel als eine Anforderung dazu verstanden wird, das übliche Normalverfahren für die Multiplikation mit seinem festgelegten Rechenweg und seiner festgelegten Schreibweise zu verwenden. Dennoch sehen viele Studierende und Lehrerinnen keinen Ansatzpunkt für eine andere Beurteilung als die bereits genannte, da dafür keinerlei Ansätze dokumentiert sind.

### 3 Marcells Multiplikationen: Das zweite Dokument

Die herausragende Besonderheit an diesem Fallbeispiel besteht darin, dass eben doch ein weiteres Dokument erhalten geblieben ist, ein Notizzettel, auf dem Marcel zusätzliche Rechnungen notiert hat. Bild 2 zeigt es. Üblicherweise nennen Studierende und Lehrerinnen so etwas eine „Nebenrechnung“. In diesem Fall aber entsteht eher der Eindruck, es handele sich um die „Hauptrechnung“. Es ist der Ort, an dem Marcel seine Ergebnisse wesentlich entwickelt, und das erste Dokument mit seinem offiziellen Charakter gewinnt nun plötzlich eher die Rolle eines „Antwortformulars“.

Man kann Studierenden und Lehrerinnen an dieser Stelle eine aufwändige Arbeit des Erschließens und Zuordnens aufbürden. Sie besteht darin, die fragmentarischen Notizen des zweiten Dokuments den Aufgaben im ersten Dokument zuzuordnen. Nach unseren Erfahrungen benötigen Studierende und Lehrer dafür etwa eine Stunde. Man kann das Verfahren aber abkürzen und ihnen das Ergebnis dieser Zuordnungsarbeit zur Verfügung stellen, so wie es bei Selter und Spiegel dokumentiert ist.

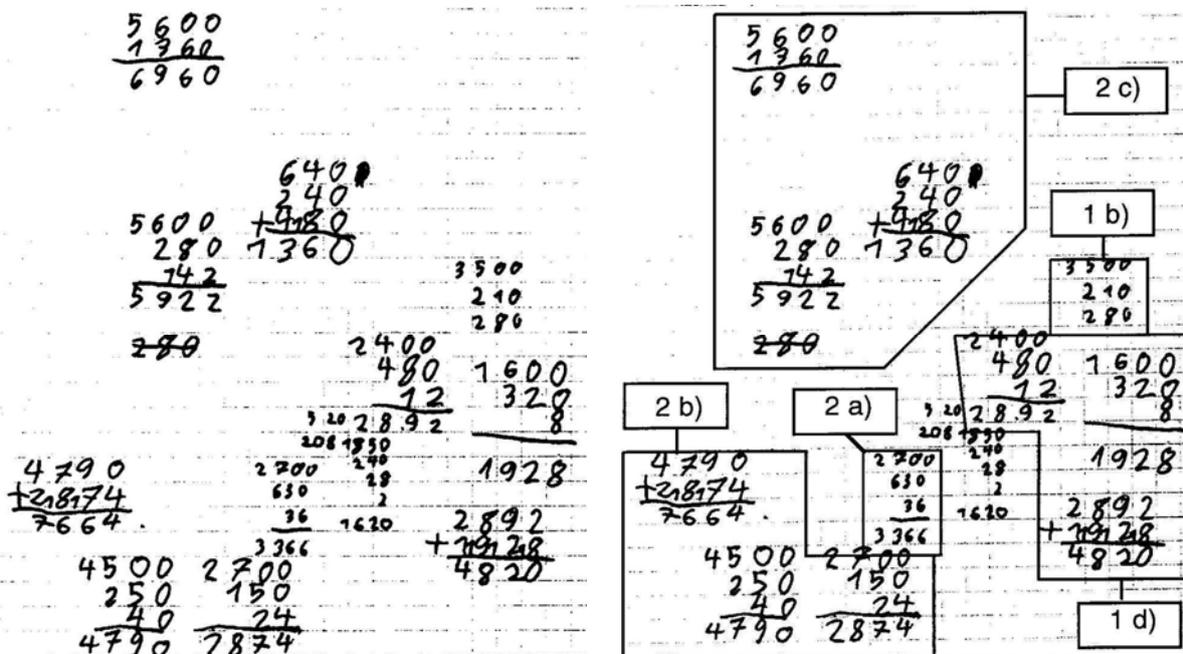


Bild 2: Marcells Rechen-Dokumente, links ohne, rechts mit Adressierung

Diese Arbeit, gleich ob in der längeren oder in der kürzeren Form, bewirkt bei Studierenden und Lehrerinnen ein Verschieben des Aufmerksamkeitsfokus: Nun rückt die Strategie in das Blickfeld. Die Studierenden und Lehrerinnen erhalten zu diesem Dokument die Aufgabe, ihre Zensur zu überdenken und eine neue Zensur zu geben. Allerdings ist diese nicht dazu gedacht, die alte zu verdrängen, wir bezeichnen sie daher neu als „Strategie-Zensur“.

Auf die inhaltliche Analyse des zweiten Dokuments gehen wir hier nicht ein, das ist bei Selter und Spiegel hinreichend dokumentiert. Aber so viel sei hier gesagt: Das zweite Dokument enthält in reichem Maße konsistente Elemente, welche die arithmetische Kompetenz von Marcel belegen und es erlauben, die Ursache seines Fehlers an einer bestimmten Stelle einzukreisen. Wie von selbst entste-

hen bei den Studierenden und Lehrerinnen Vorschläge, wie man auf der Basis dieses Dokumentes Marcel helfen kann und wie man ihn zugleich angesichts der vielen richtigen Elemente seiner Rechnungen ermutigt und bestärkt. Die von den Studierenden und Lehrerinnen eingeforderten „Strategie-Zensuren“ unterscheiden sich nun deutlich von den zuvor gegebenen Ergebnis-Zensuren. Sie bewegen sich im Mittel im Bereich des „befriedigend“. Einige liegen bei „gut“, einige bei „ausreichend“.

Deutlich wird dabei zweierlei: Bewertet man die Strategie anstelle des Ergebnisses, so entsteht in diesem Fall ein deutlich anderes Bild, und man fragt sich, inwieweit die Ergebnis-Zensur als alleinige Zensur gerechtfertigt ist. Deutlich wird darüber hinaus aber auch, dass man nur das als Basis einer Zensur heranziehen kann, was auch auf irgendeine Art dokumentiert ist. Hier wird ein grundlegendes Prinzip deutlich: *Die charakteristischen Elemente einer fachlichen Leistung, welche die Grundlage einer nun einmal notwendigen Leistungsbeurteilung sein sollen, müssen in angemessener Weise nicht flüchtig dokumentiert sein.*

Frappierend ist zudem der Umkehrschluss dazu, der auch in unserer interviewbasierten fachdidaktischen Diagnostikausbildung bedeutsam ist: Wenn nichts dokumentiert ist, so bedeutet dies nicht, dass an Kompetenz nichts vorhanden ist. Vielmehr bedeutet es, dass das Dokumentationsverfahren das Sehenswerte möglicherweise nicht sichtbar macht.

Zurück zu Marcel. Der eigentliche Shift in den Positionen der Studierenden und Lehrerinnen beim Bearbeiten dieses Beispiels besteht darin, dass sie in der Regel von sich aus neben einer leider sehr weit verbreiteten an Defiziten und Fertigkeiten orientierten Sicht auf die Leistung eine moderne an Kompetenzen und Strategien orientierte Sichtweise zusätzlich einnehmen, wenngleich sie zugeben, dass sie in einer „Lehrerzimmer-Situation“ sich der ergebnisorientierten Sichtweise stark verpflichtet fühlen.

Um eine weitere Perspektive zu eröffnen, erhalten die Studierenden an dieser Stelle eine dritte Beurteilungsaufgabe mit einer zugegebenermaßen etwas eigenwilligen Formatierung: Angenommen, in der Schule stehen Mittel für Förderstunden zur Verfügung, die man Marcel widmen kann. Wie viele Förderstunden erachten Sie für Marcel als sinnvoll: Zwei Förderstunden, oder fünf Förderstunden, oder zehn Förderstunden? Diese Fragestellung eröffnet einen Perspektivwechsel. Die Antwort nennen wir die „Förder-Zensur“. Nun gewinnt das Unterstützen neben dem Einschätzen ein bedeutsames Gewicht.

Viele Lehrerinnen und Studierende erweisen sich zunächst als Optimisten und vertreten die Auffassung, Marceles Probleme lassen sich mit zwei Förderstunden beheben. Nur wenige halten spontan einen größeren Umfang für angemessen.

#### 4 Marceles Multiplikationen: Das dritte Dokument

Das wirklich Herausragende an den Dokumenten zu Marcel sehe ich nicht allein in den bislang dargestellten ersten beiden Dokumenten, sondern vielmehr in dem dritten Dokument in Bild 3.

① a)  $\begin{array}{r} 321 \cdot 32 \\ \hline 9630 \leftarrow 10 \cdot 3 \\ 642 \leftarrow 2 \\ \hline 10272 \checkmark \end{array}$ 
     b)  $\begin{array}{r} 534 \cdot 70 \\ \hline 37380 \leftarrow 10 \cdot 7 \\ \hline 37380 \checkmark \end{array}$ 
     c)  $\begin{array}{r} 482 \cdot 64 \\ \hline 28920 \leftarrow 10 \cdot 6 \\ 1928 \leftarrow 4 \\ \hline 30848 \checkmark \end{array}$

Bild 3: Marcells Multiplikationen in seiner Klassenarbeit drei Monate zuvor

Das Bild 3 zeigt drei der Multiplikationen, die Marcel in einer Klassenarbeit drei Monate vor der oben dokumentierten geschrieben hat. Es handelt sich tatsächlich um dieselben Aufgaben. Hier sind sie nun trotz fehlender Kästchen in einer perfekten Form notiert, insbesondere sind die Teilprodukte zwischen den Linien in der korrekten Staffelung dargestellt, zudem mit notierten „Endnullen“. Darüber hinaus zeigt das Dokument, dass die Lehrerin sich offenbar in besonderem Maße um eine sachgerechte Deutung dieser Teilprodukte bemüht hat. Denn rechts neben jeder Aufgabe finden sich ergänzende Deutungsnotizen. Fast entsteht der Eindruck, als könnte man dieses Dokument zur Unterstützung einer Fördermaßnahme von Marcel direkt heranziehen.

Dennoch fragt man sich: Wie ist ein derartiger Unterschied in der Leistung über einen Zeitraum von drei Monaten erklärbar? Und darüber hinaus fragt man sich plötzlich grundsätzlich: Sind nicht viele schriftbasierte Leistungsdokumente einzuschätzen wie Standbilder aus einem laufenden Film, die nur sehr bedingt geeignet sind, den Film als Ganzes zu charakterisieren? Hier scheint urplötzlich der Bedarf nach einer *verstetigten Leistungsdokumentation* auf.

Zurück zu den Erklärungsversuchen: Eine optimistische Deutung könnte darin bestehen, dass man annimmt, Marcel habe, als er die zweite Arbeit anfertigte, einfach „einen schlechten Tag gehabt“, oder er sei belastet gewesen durch irgendwelche Dinge, die möglicherweise mit dem Mathematikunterricht nichts zu tun haben. Eine sensible Lehrerin würde den Versuch machen, diese Gründe herauszufinden und, wenn sie entsprechendes Gewicht hätten, über eine Annullierung der Klassenarbeit im ersten Dokument nachzudenken. Denn wenn externe Faktoren oder Belastungen von Marcel diese Leistung mit bedingen, dann wird er durch die negative Beurteilung doppelt belastet, wogegen eine Würdigung seiner Leistungsfähigkeit evtl. dazu beitragen kann, auch die anderen Lasten zu lindern. Soweit die optimistische Deutung.

Eine pessimistische Deutung dagegen ist die folgende: Unterstellt man, dass Marcel zu dem Zeitpunkt, als das dritte Dokument entstand, das Multiplizieren nicht *semantisch* erlernt hat, sondern *syntaktisch*, dann wird das Leistungsdefizit erklärbar. Möglicherweise hat Marcel die Arbeitsschritte, die er im dritten Dokument niedergelegt hat, nicht von der Bedeutung her verstanden, vielmehr hat er das Verfahren auf einer Handlungsoberfläche nachvollzogen. Aufgrund des dritten Dokumentes lassen sich diese beiden Handlungsgrundlagen bei ihm nicht unterscheiden. Gewisse Hinweise allerdings gibt das zweite Dokument. Es belegt, dass Marcel das Multiplizieren einer mehrstelligen Zahl mit einem einstelligen rechten Faktor weitgehend fehlerfrei darstellen kann. Nicht dagegen gelingt ihm das Multiplizieren einer mehrstelligen Zahl mit einem zweistelligen rechten Faktor. Es ist nicht auszuschließen, dass die im ersten Dokument auftretenden Defizite nicht im Sinne eines Flüchtigkeitsfehlers in der Strategie zu deuten sind, sondern doch ein tieferes Defizit im Verstehen des Stellenwertsystems indi-

zieren. In diesem Fall sind die Strategie-Zensuren möglicherweise zu optimistisch und der Förderbedarf ist mit zwei Stunden zu gering angesetzt.

## 5 Fazit

Marcel's Multiplikationen bilden ein Dokument, dessen Bedeutung weit über die fachdidaktische Dimension hinausgeht. Es bietet für Lehrerinnen und Studierende einen Anlass, sich über die Technik und die Ethik der Leistungsbeurteilung Gedanken zu machen. Es bietet einen Ansatz, darüber nachzudenken „wie viel vom Fach“ man verstanden haben muss, um einem Kind in Leistungsbeurteilung und Förderkonzepten gerecht zu werden. Und es ist geeignet, eine Balance der Perspektiven zu bewirken, der Perspektive auf die Ergebnisse, der Perspektive auf die Strategie und der Perspektive auf die Förderung.

## 6 Quellen

- Gerster, H.-D. (1982) *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. Freiburg: Herder.
- Gerster, H.-D. & Schulz, R. (1998) *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Pädagogische Hochschule Freiburg
- KMK, Ständige Konferenz der Kultusminister in Deutschland (2006): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Beschluss vom 15.10.2004. Luchterhand
- Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997) *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.
- Wollring, B. (1999) Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In: Ch. Selter & G. Walther, *Mathematikdidaktik als design science* (270-276). Leipzig: Klett.
- Wollring, B. (2004). *Individualdiagnostische Verfahren im Mathematikunterricht der Grundschule als Impulsgeber für Fördern, Unterrichten und Ausbilden. Teil I: Vergleichsstudien – Unterstützung zum Unterrichten?* Schulverwaltung HRS. Zeitschrift für SchulLeitung, SchulAufsicht und SchulKultur. Ausgabe Hessen, Rheinland-Pfalz und Saarland. 8(2004), Heft 10, 268 - 270
- Wollring, B. (2004). *Individualdiagnostische Verfahren im Mathematikunterricht der Grundschule als Impulsgeber für Fördern, Unterrichten und Ausbilden. Teil II: Notwendiger Ausbau: Handlungsleitende Diagnostik*. Schulverwaltung HRS. Zeitschrift für SchulLeitung, SchulAufsicht und SchulKultur. Ausgabe Hessen, Rheinland-Pfalz und Saarland. 8(2004), Heft 11, 297 - 298

Prof. Dr. Bernd Wollring  
Fachbereich Mathematik, Universität Kassel  
Heinrich-Plett-Straße 40, D-34132 Kassel  
[wollring@mathematik.uni-kassel.de](mailto:wollring@mathematik.uni-kassel.de)

Christoph Selter und Hartmut Spiegel

## Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation (D24 „Marcel's Multiplikationen“)

In: Selter, Ch., & Spiegel, H. (1997), *Wie Kinder rechnen*. (S. 73, 94-95). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

[Aufgaben (S. 73)]

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit abgedruckt, der Marcel's Resultate bei Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation wiedergibt.

[**Aufgabe 1:**] Versuchen Sie zunächst – allerdings ohne zu viel Zeit darauf zu verwenden – ohne Kenntnisnahme der Nebenrechnungen herauszufinden wie die Ergebnisse zu erklären sind [Dokument 1].

<p>1. a) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>·</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>0</td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table></p>	3	2	1	·	3	2	1	6	0	5																					<p>b) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>·</td><td>7</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>9</td><td>0</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table></p>	5	3	4	·	7	0	3	9	9	0																					<p>c) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>6</td><td>0</td><td>8</td><td>·</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>+</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>9</td><td>6</td></tr> </table></p>	6	0	8	·	8	7	6	4	6	4	0		+	4	4	3	5	6	1	0	2	2	9	6	<p>d) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>·</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>9</td><td>2</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td></td><td></td></tr> </table></p>	4	8	2	·	6	4	6	9	9	2	0		4	8	2	0				
3	2	1	·	3	2																																																																																																						
1	6	0	5																																																																																																								
5	3	4	·	7	0																																																																																																						
3	9	9	0																																																																																																								
6	0	8	·	8	7																																																																																																						
6	4	6	4	0																																																																																																							
+	4	4	3	5	6																																																																																																						
1	0	2	2	9	6																																																																																																						
4	8	2	·	6	4																																																																																																						
6	9	9	2	0																																																																																																							
4	8	2	0																																																																																																								
<p>2. a) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>·</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table></p>	3	7	4	·	2	4	3	3	3	6	6																									<p>b) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>9</td><td>5</td><td>8</td><td>·</td><td>5</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>6</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table></p>	9	5	8	·	5	0	3	7	6	6	4																									<p>c) <table border="1" style="display: inline-table; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>4</td><td>6</td><td>·</td><td>7</td><td>6</td><td>0</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>6</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table></p>	8	4	6	·	7	6	0	6	9	6	0																								
3	7	4	·	2	4	3																																																																																																					
3	3	6	6																																																																																																								
9	5	8	·	5	0	3																																																																																																					
7	6	6	4																																																																																																								
8	4	6	·	7	6	0																																																																																																					
6	9	6	0																																																																																																								

[Dokument 1: Marcel's aktuelle Klassenarbeit]

Christoph Selter und Hartmut Spiegel

## Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation (D24 „Marcel's Multiplikationen“)

In: Selter, Ch., & Spiegel, H. (1997), *Wie Kinder rechnen*. (S. 73, 94-95). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

[Aufgaben (S. 73)]

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit abgedruckt, der Marcel's Resultate bei Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation wiedergibt.

[**Aufgabe 2:**] Mit Hilfe der [von Marcel dokumentierten] Nebenrechnungen kann man feststellen, dass für fast alle Aufgaben erklärbar ist, wie Marcel zu seinen Ergebnissen gekommen ist. Ordnen Sie die Nebenrechnungen den einzelnen Aufgaben zu und versuchen Sie zu erklären, wie er vermutlich gerechnet hat [Dokument 2].

The image shows a student's handwritten work on a grid background. It contains several multiplication problems and their solutions, some with corrections:

- Top left: 
$$\begin{array}{r} 5600 \\ 1360 \\ \hline 6960 \end{array}$$
- Middle left: 
$$\begin{array}{r} 5600 \\ 280 \\ \hline 5922 \end{array}$$
 with a correction  $280$  written below.
- Bottom left: 
$$\begin{array}{r} 4790 \\ +21874 \\ \hline 7664 \end{array}$$
- Bottom left (second): 
$$\begin{array}{r} 4500 \\ 250 \\ 40 \\ \hline 4790 \end{array}$$
- Middle: 
$$\begin{array}{r} 6400 \\ 340 \\ 1360 \\ \hline 8100 \end{array}$$
- Middle right: 
$$\begin{array}{r} 3500 \\ 210 \\ 280 \\ \hline 3990 \end{array}$$
- Middle right (second): 
$$\begin{array}{r} 2400 \\ 480 \\ 12 \\ \hline 2892 \end{array}$$
- Middle right (third): 
$$\begin{array}{r} 1600 \\ 320 \\ 8 \\ \hline 1928 \end{array}$$
- Middle right (fourth): 
$$\begin{array}{r} 2892 \\ +1928 \\ \hline 4820 \end{array}$$
- Bottom middle: 
$$\begin{array}{r} 2700 \\ 630 \\ 36 \\ \hline 3366 \end{array}$$
- Bottom middle (second): 
$$\begin{array}{r} 2700 \\ 150 \\ 24 \\ \hline 2874 \end{array}$$

[Dokument 2: Marcel's Rechenwege ohne Adressierungen]

Christoph Selter und Hartmut Spiegel

## Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation (D24 „Marcel's Multiplikationen“)

In: Selter, Ch., & Spiegel, H. (1997), *Wie Kinder rechnen*. (S. 73, 94-95). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

[Aufgaben (S. 73)]

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit abgedruckt, der Marcel's Resultate bei Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation wiedergibt.

[**Aufgabe 3:**] Es folgt ein Auszug aus einer Klassenarbeit Marcel's ein Vierteljahr zuvor [Dokument 3]. Vergleichen Sie diesen mit dem Ausschnitt aus der obigen [aktuellen] Klassenarbeit.

Handwritten student work for three multiplication problems:

- a)  $321 \cdot 32$ 

$$\begin{array}{r} 9630 \leftarrow 10 \cdot 3 \\ 642 \leftarrow 2 \\ \hline 10272 \checkmark \end{array}$$
- b)  $534 \cdot 70$ 

$$\begin{array}{r} 37380 \leftarrow 10 \cdot 7 \\ \hline 37380 \checkmark \end{array}$$
- c)  $482 \cdot 64$ 

$$\begin{array}{r} 28920 \leftarrow 10 \cdot 6 \\ 1928 \leftarrow 4 \\ \hline 30848 \checkmark \end{array}$$

[Dokument 3: Marcel's Klassenarbeit ein Vierteljahr zuvor]

Christoph Selter und Hartmut Spiegel

## Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation (D24 „Marcel's Multiplikationen“)

In: Selter, Ch., & Spiegel, H. (1997), *Wie Kinder rechnen*. (S. 73, 94-95). Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag GmbH.

[Aufgaben (S. 73)]

Im Folgenden wird ein Ausschnitt aus einer Klassenarbeit abgedruckt, der Marcel's Resultate bei Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation wiedergibt.

[Deutungstext (S. 94 - 95), Bearbeitung: B. Wollring]

Zunächst möchten wir festhalten, dass viele der Rechnungen, die Marcel durchführte, korrekt sind. Fehler im Einmaleins und im Einspluseins haben wir nicht feststellen können.

Versucht man Marcel's Lösungen ohne Zuhilfenahme der Nebenrechnungen zu verstehen, so kann man nach längerem „Knobeln“ feststellen, dass er die Ergebnisse der Aufgaben 1a, 1d, 2a und 2b wie folgt ermittelt haben könnte: Er addierte zunächst die Ziffern des rechts stehenden Faktors und multiplizierte dann das Ergebnis mit dem links stehenden Faktor, indem er das übliche Verfahren benutzte.

a)	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>·</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>16</td><td>05</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3	2	1	·	3	2	16	05																	d)	<table border="1"><tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>·</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td><del>69</del></td><td><del>920</del></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>48</td><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	4	8	2	·	6	4	<del>69</del>	<del>920</del>					48	20											a)	<table border="1"><tr><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>·</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>3366</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	3	7	4	·	2	4	3	3366																					b)	<table border="1"><tr><td>9</td><td>5</td><td>8</td><td>·</td><td>5</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>7664</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	9	5	8	·	5	0	3	7664																				
3	2	1	·	3	2																																																																																																										
16	05																																																																																																														
4	8	2	·	6	4																																																																																																										
<del>69</del>	<del>920</del>																																																																																																														
48	20																																																																																																														
3	7	4	·	2	4	3																																																																																																									
3366																																																																																																															
9	5	8	·	5	0	3																																																																																																									
7664																																																																																																															

[Marcel's Aufgaben 1a, 1d, 2a und 2b: Ziffern im rechten Faktor addiert, dann multipliziert?]

Dass zu 1a keine Nebenrechnung vorliegt, spricht dafür, dass er zumindest bei dieser Aufgabe tatsächlich so vorgegangen ist.

Seine Nebenrechnung zu der Aufgabe 2a ( $2700+630+36$ ) bestätigt das auch hier, wenn auch mit einer Einschränkung: Er multiplizierte tatsächlich 374 mit 9, aber nicht in der schriftlichen Endform, sondern halbschriftlich durch das schrittweise Abarbeiten der Hunderter, Zehner und Einer.

2. a)	3	7	4	·	2	4	3
	3	3	6	6			

2200
630
36
<u>3366</u>
2200

[Marcel's Aufgabe 2a: Ziffern im rechten Faktor addiert, dann halbschriftlich multipliziert?]

Bei den Aufgaben 1d und 2b addierte er die Ziffern des rechten Faktors nicht, sondern multiplizierte sie einzeln jeweils mit den Hunderten, Zehner und Einern des linken Faktors. Er benutzte ein von der Struktur her korrektes halbschriftliches Verfahren mit dem einzigen Fehler, dass er die Stellenwerte der Ziffern des einen Faktors nicht berücksichtigte.

d)	4	8	2	·	6	4
	<del>6</del>	<del>9</del>	<del>2</del>			
	4	8	2			

2400	
480	1600
12	328
<u>2892</u>	8
	1928
	2892
	+ 1928
	<u>4820</u>

[Marcel's Aufgabe 1d: Ziffern im rechten Faktor einzeln mit linkem Faktor multipliziert?]

b)	9	5	8	·	5	0	3
	7	6	6	4			

4790	
+ 2874	
<u>7664</u>	
4500	2800
250	150
40	24
<u>4790</u>	<u>2874</u>

[Marcel's Aufgabe 2b: Ziffern im rechten Faktor einzeln mit linkem Faktor multipliziert?]

Bei der Aufgabe 1b ging er ebenso vor, nur dass er 280 statt 28 notierte.

b)	5	3	4	·	7	0
	3	9	9	0		

3500
210
280

[Marcel's Aufgabe 1b: Ziffern im rechten Faktor einzeln mit linkem Faktor multipliziert? 280 statt 28]

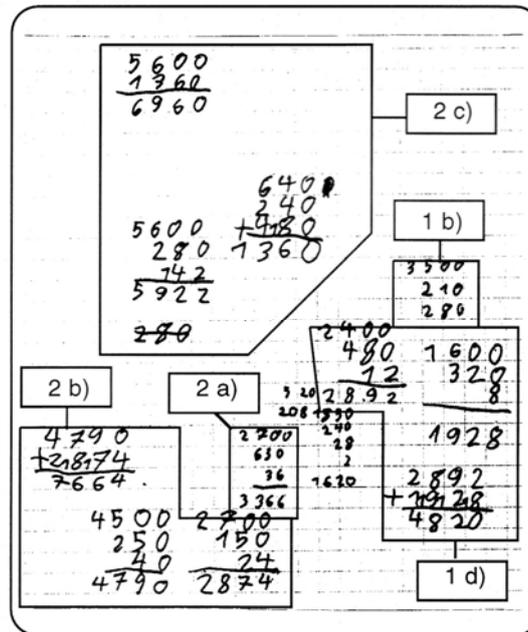
Bei 2c berechnete er das Teilprodukt  $846 \cdot 7$  korrekt. Bei  $846 \cdot 6$  las er - durchaus verständlich - die 6 im zweiten Faktor vereinzelt als 8 und berechnete als Erstes  $800 \cdot 8$ . Zwar notierte er nur 640; es ist aber durchaus möglich, dass er zunächst 6400 geschrieben und dann die letzte 0 durchgestrichen hatte. Dann ermittelte er das Resultat des Produkts  $40 \cdot 6$  korrekt mit 240, bevor er wohl erneut die 6 als 8 wahrnahm und  $6 \cdot 8$  ausrechnete. Warum er hier allerdings 480 statt 48 angab, vermögen wir ebenso wenig zu erklären, wie die Tatsache, dass er nur mit dem ersten Summanden der links stehenden Summe und nicht mit deren Ergebnis weiterrechnete.

[Marcel's Aufgabe 2c: 8 statt 6 gelesen?]

Bei der Aufgabe 1c vermuten wir, dass Marcel ausnahmsweise schriftlich rechnete, da - so eventuell seine Überlegung - die Null in der Zehnerstelle des ersten Summanden keine Probleme mit Übertragungsziffern bereiten würde. Erneut interpretierte er wohl die 6 der 608 als 8; zunächst berechnete er die erste Zeile korrekt. Auch in der zweiten Zeile begann er mit 56 richtig. Was ihn allerdings veranlasste die Zeile zu 44356 zu komplettieren, vermögen wir nicht zu sagen.

[Marcel's Aufgabe 1c]

Die Zugehörigkeit der Nebenrechnungen zu den Aufgaben haben wir in der Abbildung 14 verdeutlicht. Die dort nicht eingerahmten Zahlen stellen vermutlich eher Merkmahlen dar als zusammenhängende Rechnungen. Sie den einzelnen Aufgaben zuzuordnen wäre u. E. spekulativ.



[Dokument 2 mit Adressierungen:] „Abbildung 14: Marcells Rechenwege“

## Quellen

- Gerster, H. D.: *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren*. Freiburg: Herder 1982.
- Padberg, F.: *Didaktik der Arithmetik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1986, S. 164 ff.
- Radatz, H.: *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg 1980.
- Radatz, H., & Schipper, W.: *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel 1983, S. 115 ff.